Chi è *dx*?

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE

versione del 28 giugno 2009

Questi appunti

Si tratta della ristampa di mie vecchie note, usate a Pavia quando insegnavo Analisi Matematica II agli studenti di Fisica. Le dispensine originarie erano state ciclostilate su fogli di dimensione maggiore del canonico A4, il che mi pone problemi di scannerizzazione. Le ho quindi riscritte in LaTeX.

Approfitto per ricordare la triade dei "bidelli" che a quel tempo lavoravano a Pavia, presso l'Istituto di Matematica: Corotti, Medaglia e Meriggi. Il ciclostilatore era Corotti.

Ringrazio, infine, magliocurioso del forum di matematicamente.it per avermi incoraggiato a sobbarcarmi questa piccola fatica.

Link vari:

Fioravante PATRONE

ASD Scuderia La Bellaria

Decisori (razionali) interagenti

Equazioni differenziali e urang-utang©

E-mail: patrone@diptem.unige.it

- Ricordiamo innanzi tutto la nozione di differenziabilità.

  Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto. f dicesi differenziabile in $P_0 \in A$ se esiste una funzione lineare $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che[1]:

$$\lim_{P \to P_0} \frac{[f(P) - f(P_0)] - \alpha(P - P_0)}{|P - P_0|} = 0$$

  La funzione α si dice differenziale di f (nel punto P_0; naturalmente, al variare di P_0, α in generale varia) e la si indica con il simbolo $(df)_{(P_0)}$.

- L'uso del simbolo $(df)_{(P_0)}$ è motivato sia da ragioni di carattere storico da fare risalire alla notazione introdotta da Leibniz, sia dalla estrema praticità di questa notazione (sta proprio in questo la ragione del permanere di questa simbologia e del suo affermarsi su quella proposta da Newton: $\dot{x}$, $\ddot{x}$, etc.)

  L'avere indicato con $(df)_{(P_0)}$ il differenziale di f, automaticamente dà senso a simboli come dx_i e a formule del tipo $(df)_{(P_0)} = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(P_0)} dx_i$. Lo scopo principale di questa dispensa è proprio di rendere conto dell'affermazione precedente, cosa che sarà fatta in varie tappe nel seguito.

- Concentriamo ora la nostra attenzione su α. Poiché α è una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, per sapere quale valore assume nel generico punto $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è sufficiente conoscere il valore di α su una base di $\mathbb{R}^n$ (è la ben nota possibilità di rappresentare una applicazione lineare con una matrice: in questo caso otterremmo una matrice $1 \times n$). Se indichiamo con $E_1, E_2, \dots, E_n$ la base canonica[2] di $\mathbb{R}^n$ e con α_i il valore che α assume in E_i abbiamo che:

$$\alpha(T) = \alpha((t_1, t_2, \dots, t_n)) = \alpha(\sum_{i=1}^n t_i E_i) = \sum_{i=1}^n t_i \alpha(E_i) = \sum_{i=1}^n t_i \alpha_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i$$

  In altre parole, α è individuata dagli n numeri α_i.

- Se f è differenziabile, abbiamo $\alpha_i = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(P_0)}$ (cfr. Stampacchia, teor. 15.2, pag. 72), per cui possiamo scrivere[3] che:

$$\alpha(P - P_0) = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(P_0)} (x_i - x_{0i})$$

[1] Con $\alpha(P - P_0)$ intendiamo il valore di α nel punto $P - P_0$.
[2] Cioè $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $E_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $E_n = (0, 0, \dots, 1)$.
[3] Qui, naturalmente, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $P_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$.

Se chiamiamo $(\text{grad}\, f)_{(P_0)}$ il vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono:

$$((\frac{\partial f}{\partial x_1})_{(P_0)}, (\frac{\partial f}{\partial x_2})_{(P_0)}, \ldots, (\frac{\partial f}{\partial x_n})_{(P_0)}),$$

abbiamo che[4]:

$$\alpha(P - P_0) = (\text{grad}\, f)_{(P_0)} \cdot (P - P_0).$$

- Consideriamo le funzioni $\Pi_{x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definite: $\Pi_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$. Queste funzioni (che non sono altro che le proiezioni di $\mathbb{R}^n$ sull'asse coordinato i-esimo) sono ovviamente lineari, pertanto differenziabili in ogni punto e il differenziale in ogni punto sarà la funzione stessa: $d\Pi_{x_i} = \Pi_{x_i}$.

  Le funzioni Π_{x_i} sono elementi di $(\mathbb{R}^n)^*$, ovverossia del duale di $\mathbb{R}^n$. Non solo, ma le funzioni $\Pi_{x_1}, \Pi_{x_2}, \ldots, \Pi_{x_n}$ sono una base di $(\mathbb{R}^n)^*$: ancora più precisamente sono la base duale della base canonica (cioè: $\Pi_{x_i}(E_j) = \delta_{ij}$).

  Poiché $\Pi_{x_1}, \Pi_{x_2}, \ldots, \Pi_{x_n}$ sono una base di $(\mathbb{R}^n)^*$, ne segue che α può essere espressa come combinazione lineare delle $\Pi_{x_1}, \Pi_{x_2}, \ldots, \Pi_{x_n}$; anzi, poiché le $\Pi_{x_1}, \Pi_{x_2}, \ldots, \Pi_{x_n}$ sono la base duale della base canonica, si ha che $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Pi_{x_i}$, dove α_i sono le costanti precedentemente introdotte.

  Ricordato che α è stata indicata con $(df)_{(P_0)}$, che $\alpha_i = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(P_0)}$ e che $d\Pi_{x_i} = \Pi_{x_i}$, sia ha:

$$(df)_{(P_0)} = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(P_0)} d\Pi_{x_i}$$

- Per capire come mai si usa la notazione:

$$(df)_{(P_0)} = \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_i})_{(P_0)} dx_i,$$

  anziché scrivere la relazione scritta sopra, occorre ricordare una convenzione che viene usata comunemente.

  Data $\phi : X \to Y$, applicazione fra due qualsiasi insiemi X ed Y, quando si intende fare riferimento alla funzione ϕ, spesso si parla della "funzione $\phi(x)$": questa locuzione è impropria, in quanto $\phi(x)$ non

[4] $v \cdot w$ indica il prodotto scalare tra i vettori v e w.

indica la funzione, che è ϕ, bensì il valore che ϕ assume nel punto x. D'altronde questa notazione in certi casi è molto utile: se $\phi(x) = x^2 - 3x + 5$, per esempio, sarebbe molto scomodo descrivere ϕ in modo diverso dal solito, che è quello di dire: "sia ϕ la funzione $x^2 - 3x + 5$", anche se è improprio[5].

Per questa ragione, la funzione Π_{x_i} viene anche indicata comunemente come "la funzione $\Pi_{x_i}(P)$", ovverossia "la funzione x_i", visto che $\Pi_{x_i}(P) = x_i$. Pertanto, anziché scrivere $d\Pi_{x_i}$, si scriverà comunemente anche dx_i. Al di là della giustificazione sopra indicata per l'uso comune di un simbolo come dx_i, quello che non va dimenticato è che cosa significa dx_i: è il differenziale della funzione Π_{x_i} (che coincide con la funzione Π_{x_i} stessa in quanto lineare).

Sarà infine opportuno ricordare (servirà quando si parlerà di forme differenziali) che $dx_i, dx_2, \ldots, dx_n$ costituiscono una base di $(\mathbb{R}^n)^*$. Naturalmente se si è in $(\mathbb{R}^2)^*$ si usa la notazione dx, dy, anziché dx_1, dx_2 ed analogamente in $(\mathbb{R}^3)^*$ si userà dx, dy, dz.

[5]Si potrebbe, per esempio, dire: "ϕ è la funzione quadrato, meno tre volte la funzione identità, più la funzione costante uguale a cinque".